



# O nekim “minimalnim” geometrijskim telima (i njihovoj vezi sa fizikom)



Veljko Dmitrašinović

*Laboratorija za fiziku (010),  
INN Vinča*

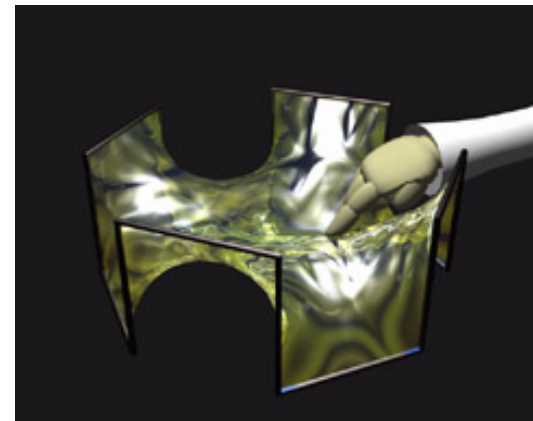
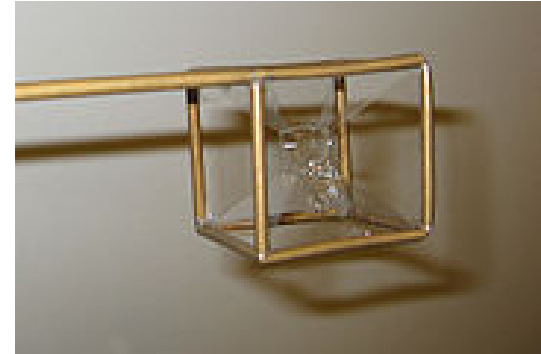


# Sadržaj

- Mehuri od sapunice i “minimalne površine”
- Plateau-ov problem u geometriji
- Fermat-Torricelli-eva tačka u trouglu
- Neka pitanja u vezi sa FT tačkom
- Granična linija Torricelli-eve tačke
- Reuleaux-ove krive
- Krive konstantne širine
- Steiner-ove mreže u ravni
- Fermat-Torricelli-eva tačka u tetraedru

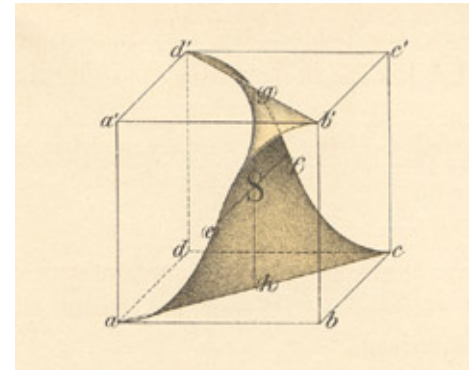
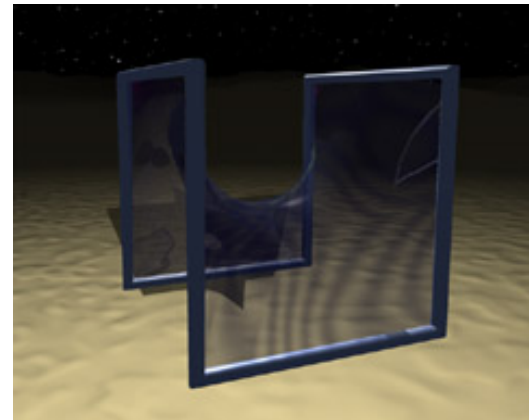
# Mehuri od sapunice i “minimalne površine”

- Joseph Plateau ([October 14, 1801](#) – [September 15, 1883](#)) ([http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph\\_Plateau](http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Plateau)) je bio belgijski fizičar koji je prvi počeo da sistematski radi sa mehurima od sapunice
- Sapunica ima visok površinski napon koji vodi do toga da njeni mehurovi primaju geometrijski oblik sa minimalnom površinom pri zadatim graničnim uslovima.
- Primeri su prikazani na slikama.



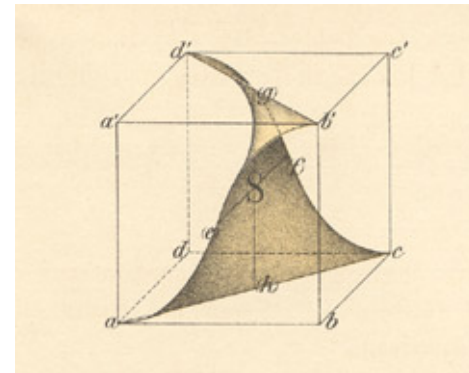
# Mehuri od sapunice i “minimalne površine”

- “Granični uslovi” su određeni oblikom žičanog rama
- Ram se umoči u vodeni rastvor sapunice i onda (pažljivo) izvadi.
- Sam mehur je (često) nestabilan, i teško ga je jasno slikati, a kamoli tačno izmeriti



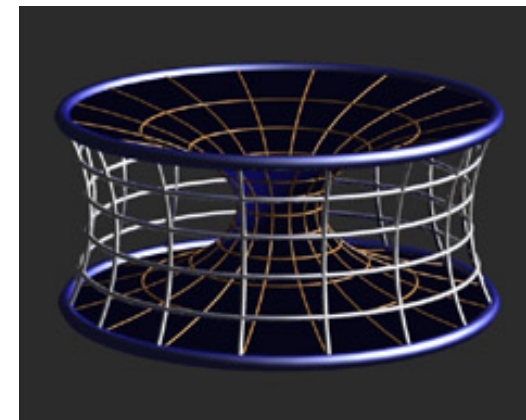
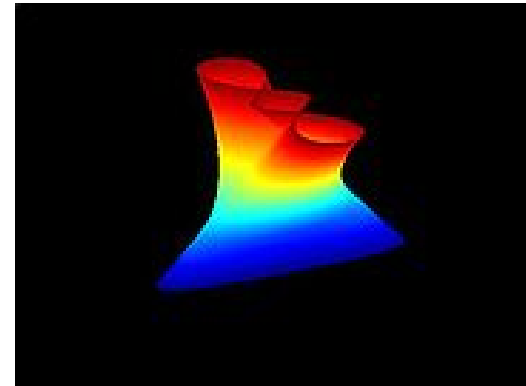
# “Minimalne površine” u geometriji

- Ovo pitanje je odmah (u drugoj polovini 19. veka) postalo izazov za matematičare: Riemann, Dirichlet, Weierstrass su se bavili ovim problemom
- Geometrijsko pitanje “oblika površi” sa minimalnom površinom je tako dobilo naziv Plateau-ov problem
- Pravljeni su žičani, drveni, gipsani modeli ovih površina, a dobile su i imena.

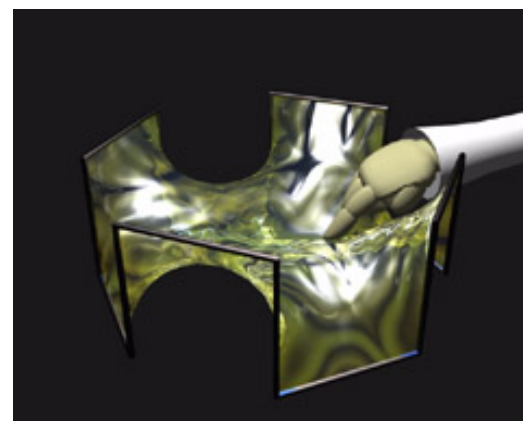
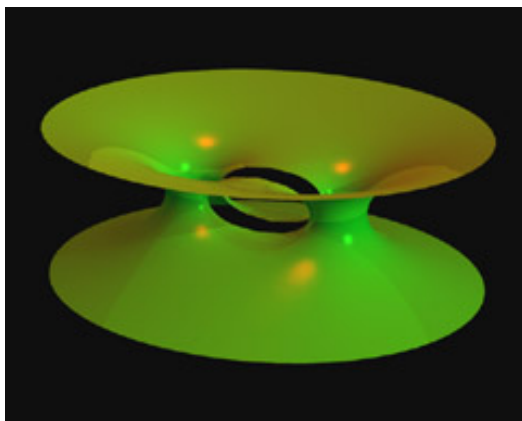
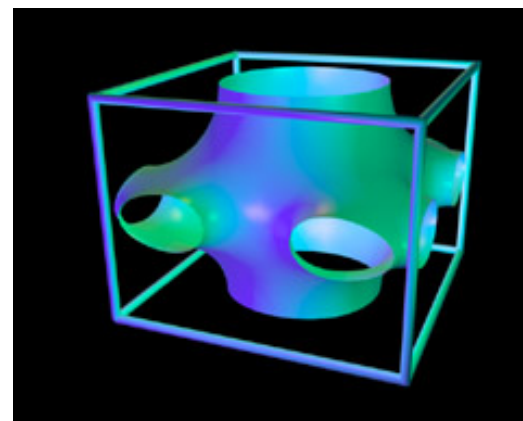
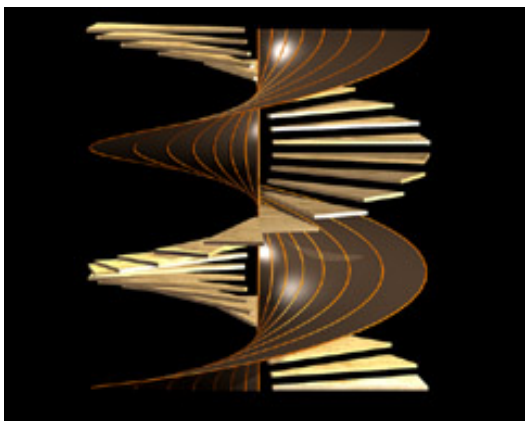


# Plateau-ov problem “minimalne površine” u geometriji

- Geometrijsko pitanje “oblika površi” sa minimalnom površinom je tako dobilo naziv Plateau-ov problem.
- Danas se Plateau-ov problem prvenstveno rešava numerički, mada ima i važnih analitičkih rezultata.

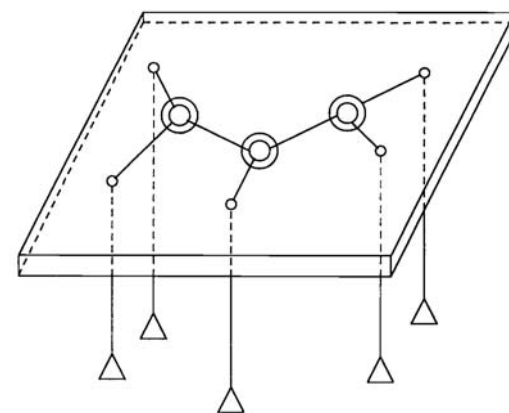
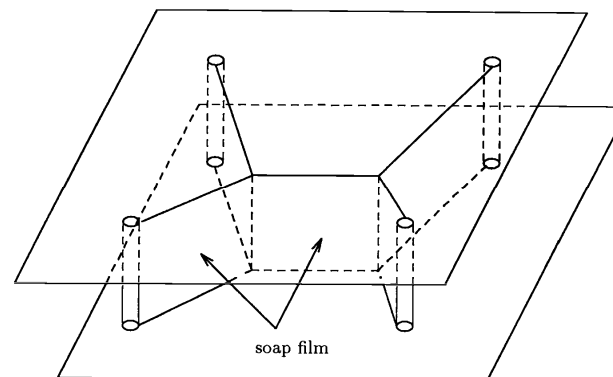


# Primeri “minimalnih površina” u geometriji

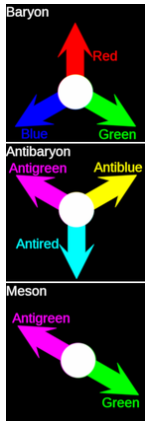


# Problem “minimalne dužine” u mehanici

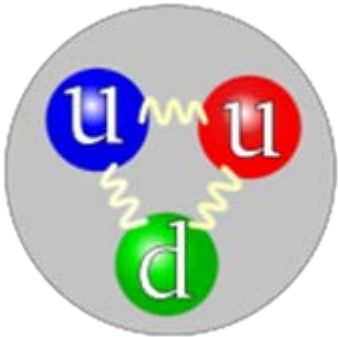
- Plateau-ov problem je povezan sa geometrijskim pitanjem “oblika strune” sa minimalnom dužinom
- Isti problem se može rešavati “mehaničkim” putem
- Najprostiji primer je Fermat-Toricelli-Steiner-ova tačka u trouglu



# Interakcije među kvarkovima



- Paulijev princip zahteva nov stepen slobode za kvarkove: 3 “boje” (zato “hromo-dinamika”).
- To je dovoljno da se objasne spektri i magnetni momenti većine hadrona
- Osnovna interakcija koja vezuje kvarkove u nedeljive celine (“konfajnement”) zavisi od boje



# Konfajnement ili večno zarobljeni kvarkovi

- Konfajmenta izgleda da potiče od sužavanja “fluksa gluona” u uske cevi koje se ponašaju kao da su elastične strune
- Možemo li to da proverimo? Rad sa Toruom Sato-om i Milovanom Šuvakovim

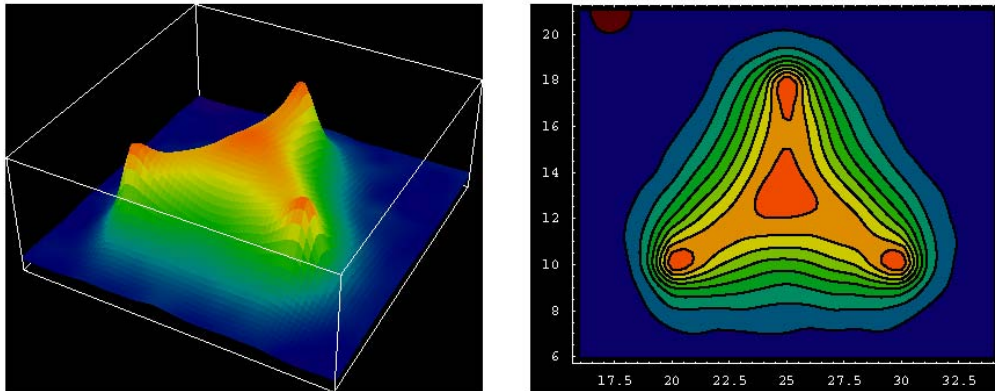
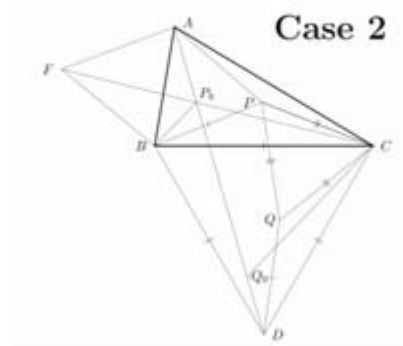
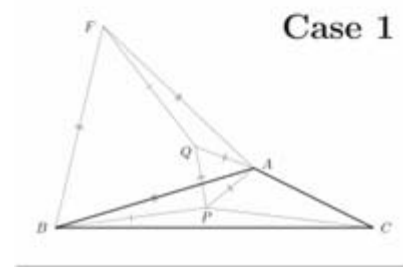
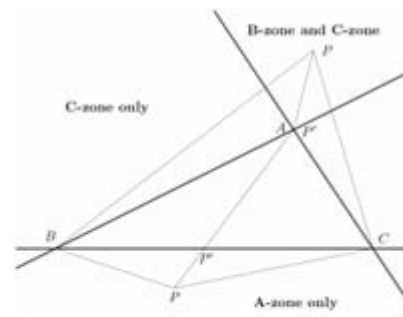


Figure 2. The flux-tube profile in the spatially-fixed 3Q system, in the MA projected QCD.<sup>6</sup> The distance between the junction and each quark is about 0.5 fm.

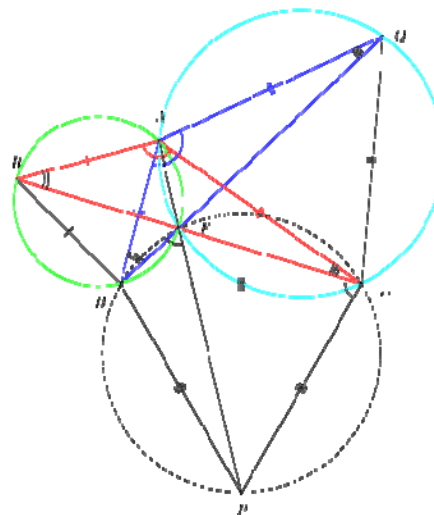
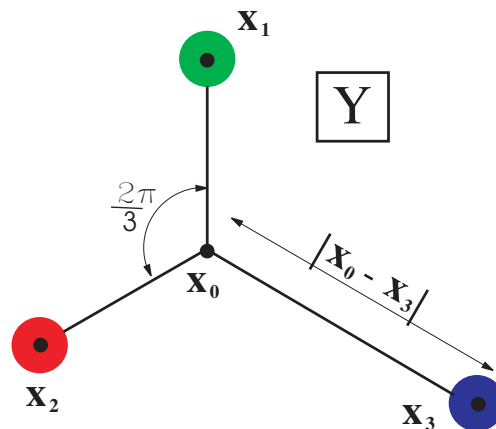
# Fermat-Torricelli-Steiner-ova tačka

- Klasičan geometrijski problem (mada ga nema kod Euklida): naći tačku takvu da je suma rastojanja od tri vrha trougla najmanja.
- Evangelista Torricelli ([oktobar 15, 1608](#) – [oktobar 25, 1647](#)) [italijanski](#) fizičar i matematičar, poznat po svom izumu [barometra](#), je rešio problem oko 1640.g, koji mu je postavio Pierre de Fermat kao lični izazov.
- Torricelli-jev đak Cavalieri je 1647. objavio rešenje



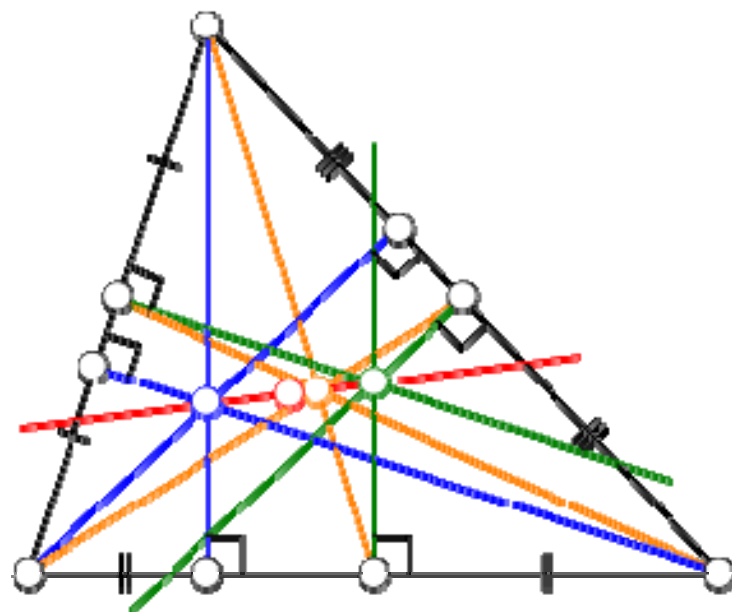
# Fermat-Toricelli-Steiner-ova tačka

- Ako se zna da tri “strune” čine uglove od 120 stepeni u Fermat-Toricelli-Steiner-ovoj tački
- Onda je konstrukcija minimalne strune jednostavna
- Tek je 1750. Simpson objavio dokaz da je zbir dužina ove tri “minimalne” strune jednak dužini Simpsonovih linija (crvena, plava i crna).



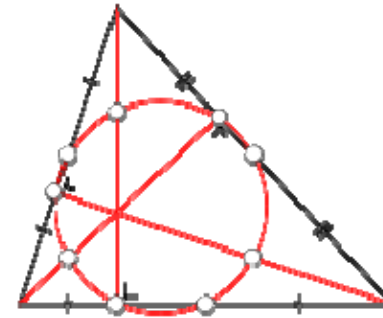
# Eulerova prava

- Euler (1765) je pokazao da na jednoj pravoj leže centroid (baricentar) (narandžast), centar opisane kružnice, ortocentar i centar “Feuerbachove kružnice”
- Centar Feuerbachove kružnice je na pola puta od ortocentra do centra opisane kružnice, a razdaljina od centroida do centra opisane kružnice je polovina rastojanja od centroida do ortocentra.
- de Longchamp-ova, Schiffler-ova i Exeter-ova tačka takođe leže na Euler-ovoj pravoj.
- Ali, centar upisane kružnice ne leži na Euler-ovoj pravoj osim za ravnokrake trouglove.



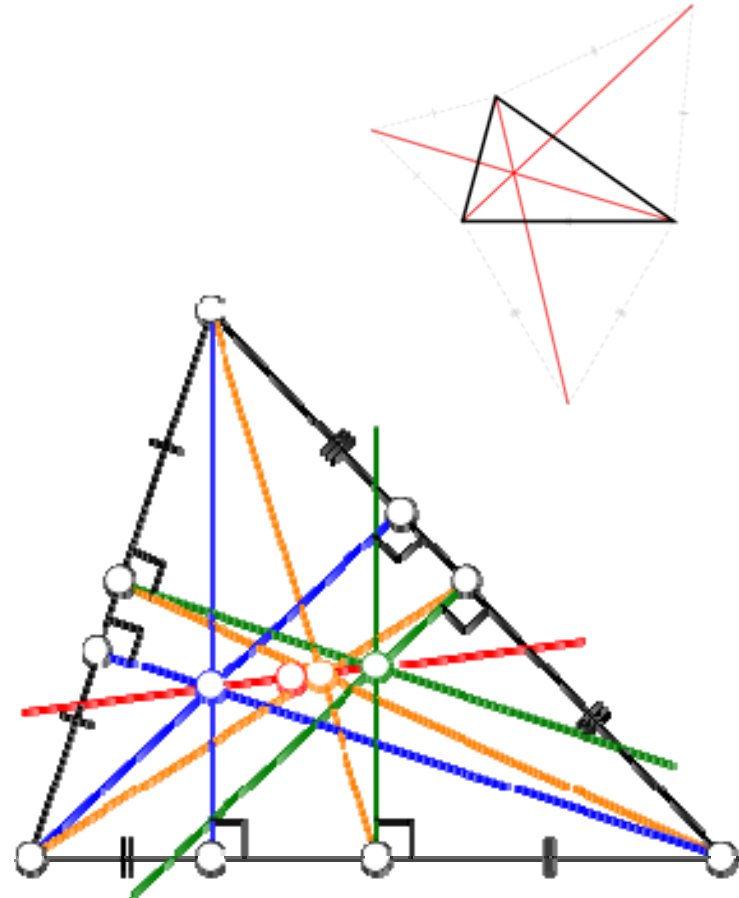
# Feuerbachova kružnica

- <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/FeuerbachProof.shtml>



# Otvorena pitanja I

- \* Da li Fermat-Toricelli tačka leži na Euler-ovoj pravoj?
- \* Ako leži, onda gde? na kom rastojanju od centroida?
- \* Ako ne leži, zašto ne?



# Dužina minimalne strune

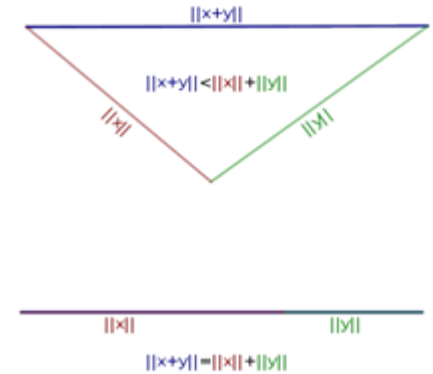
- Dužina minimalne strune kao funkcija tri strane (a,b,c) trougla
- Dva člana pod korenom:
  - 1) "moment inercije";
  - 2) površina trougla
- Oba člana su simetrični pod permutacijama vrhova trougla.

value of the total length of color flux tubes linking the three quarks. When all angles of the 3Q triangle do not exceed  $2\pi/3$ ,  $L_{\min}$  is expressed as

$$L_{\min} = \left[ \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \right]^{1/2}, \quad (2)$$

where  $a$ ,  $b$ , and  $c$  denote the three sides of the 3Q triangle as shown in Fig. 1. In this case, the physical junction appears

# Otvorena pitanja II



- Definicija “dužine rastojanja” (“metrika”)  $d$  mora da zadovoljava nekoliko osnovnih zahteva: a) “pozitivnost”  $d(x, y) \geq 0$ ; b)  $d(x, y) = 0$  ako i samo ako  $x = y$ ; c) *simetrija*  $d(x, y) = d(y, x)$ ; d) nejednakost trougla  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , a inače može da se proizvoljno menja
- Kada promenimo “običnu” (Euklidovu) definiciju dužine  $d$  (dignemo je na drugu potenciju), FT tačka se “pomeri” u centroid.
- \*\* Šta se dešava sa FT tačkom za druge/proizvoljne potencije  $\alpha$  ?

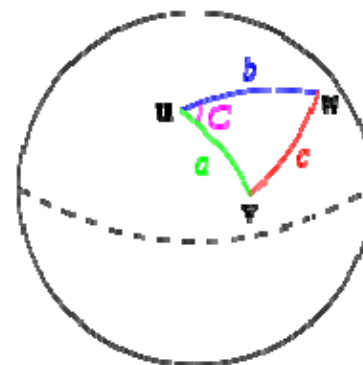
$$\begin{aligned}
 d_E(1, 2) &= |\vec{x} - \vec{y}| \\
 &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
 d_{\alpha=2}(1, 2) &= |\vec{x} - \vec{y}|^2 \\
 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\
 d_\alpha(1, 2) &= |\vec{x} - \vec{y}|^\alpha \\
 &= \left( \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \right)^\alpha
 \end{aligned}$$

# Ne-Euklidova geometrija

- Sferni trougao zadovoljava sferni teorem kosinusa
- Ovaj identitet se može izvesti pomoću trougla nastalog od linija tangenti na sferni trougao sa uglom  $C$ , a koristeći kosinusni teorem u ravni.
- Definicija “rastojanja” (“metrika”)  $d$  u  $\Delta\sigma$  prostoru sa konstantnom zakrivljenošću (sfera)

$$d = r \Delta\hat{\sigma}.$$

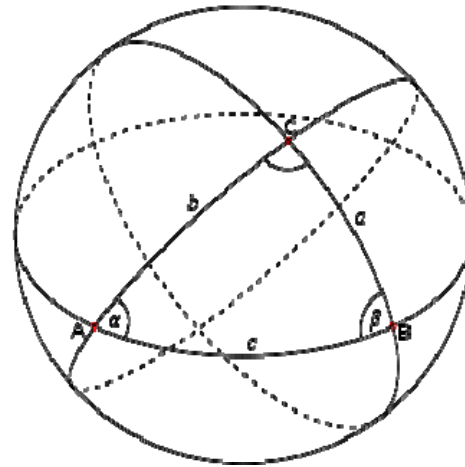
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$



$$\Delta\hat{\sigma} = \arccos(\sin \phi_s \sin \phi_f + \cos \phi_s \cos \phi_f \cos \Delta\lambda).$$

# Otvorena pitanja III

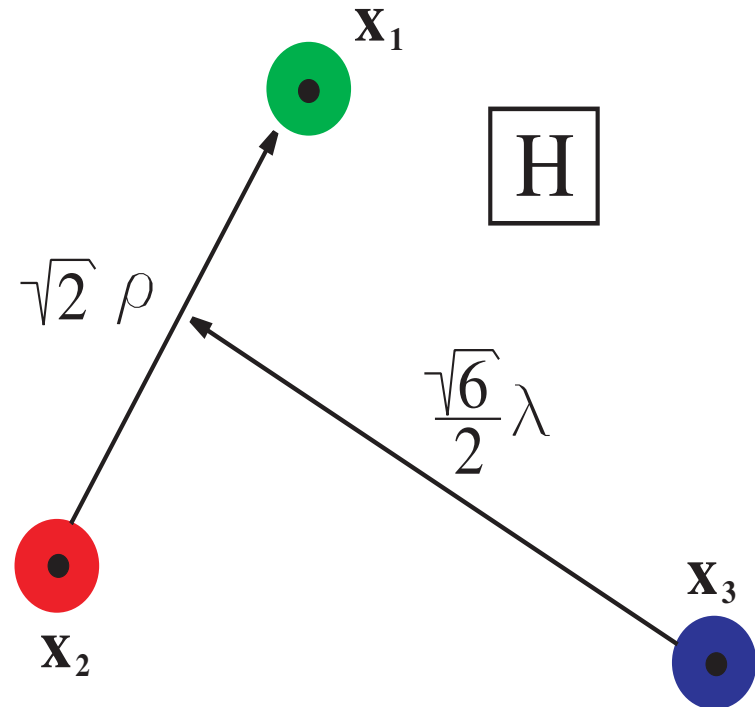
- \*\*\* Naći FT tačku trougla na površini lopte t.j. u prostoru sa konstantnom pozitivnom zakrivljenošću.



$$\Delta \hat{\sigma} = \arctan \left( \frac{\sqrt{(\cos \phi_f \sin \Delta \lambda)^2 + (\cos \phi_s \sin \phi_f - \sin \phi_s \cos \phi_f \cos \Delta \lambda)^2}}{\sin \phi_s \sin \phi_f + \cos \phi_s \cos \phi_f \cos \Delta \lambda} \right).$$

# Dužina Y-strune preko Jakobi-ijevih koordinata

- Jakobi-ije vektori (koordinate)  
 $(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$
- Čine bazu dvodimenzionalne ireducibilne reprezentacije permutacione grupe tri elementa  $S_3$ .



# Granična linija Y-strune preko Jakobi-ijevih koordinata

- u Jakobi-ijevim koordinatama  $(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$  dužina minimalne strune postaje jako komplikovana
- Četiri “slučaja”:
- Granična linija medju njima morati biti invarijantna pod permutacijama  $S_3$

$$V_Y = \sigma \sqrt{\frac{3}{2}(\rho^2 + \lambda^2 + 2|\rho \times \lambda|)}$$

$$\text{when } 2\rho^2 - \sqrt{3}\rho \cdot \lambda \geq -\rho \sqrt{\rho^2 + 3\lambda^2 - 2\sqrt{3}\rho \cdot \lambda}$$

$$\text{and } 2\rho^2 + \sqrt{3}\rho \cdot \lambda \geq -\rho \sqrt{\rho^2 + 3\lambda^2 + 2\sqrt{3}\rho \cdot \lambda}$$

$$\text{and } 3\lambda^2 - \rho^2 \geq -\frac{1}{2}\sqrt{(\rho^2 + 3\lambda^2)^2 - 12(\rho \cdot \lambda)^2}$$

$$V_V = \sigma \left( \sqrt{\frac{1}{2}(\rho^2 + 3\lambda^2 + 2\sqrt{3}\rho \cdot \lambda)} + \sqrt{\frac{1}{2}(\rho^2 + 3\lambda^2 - 2\sqrt{3}\rho \cdot \lambda)} \right)$$

$$\text{when } 3\lambda^2 - \rho^2 \leq -\frac{1}{2}\sqrt{(\rho^2 + 3\lambda^2)^2 - 12(\rho \cdot \lambda)^2}$$

$$V_V = \sigma \left( \sqrt{2}\rho + \sqrt{\frac{1}{2}(\rho^2 + 3\lambda^2 + 2\sqrt{3}\rho \cdot \lambda)} \right)$$

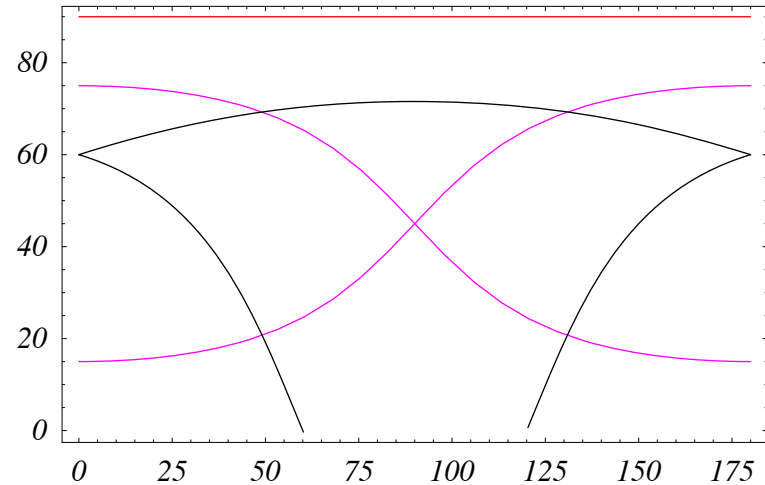
$$\text{when } 2\rho^2 + \sqrt{3}\rho \cdot \lambda \leq -\rho \sqrt{\rho^2 + 3\lambda^2 + 2\sqrt{3}\rho \cdot \lambda}$$

$$V_V = \sigma \left( \sqrt{2}\rho + \sqrt{\frac{1}{2}(\rho^2 + 3\lambda^2 - 2\sqrt{3}\rho \cdot \lambda)} \right)$$

$$\text{when } 2\rho^2 - \sqrt{3}\rho \cdot \lambda \leq -\rho \sqrt{\rho^2 + 3\lambda^2 - 2\sqrt{3}\rho \cdot \lambda}$$

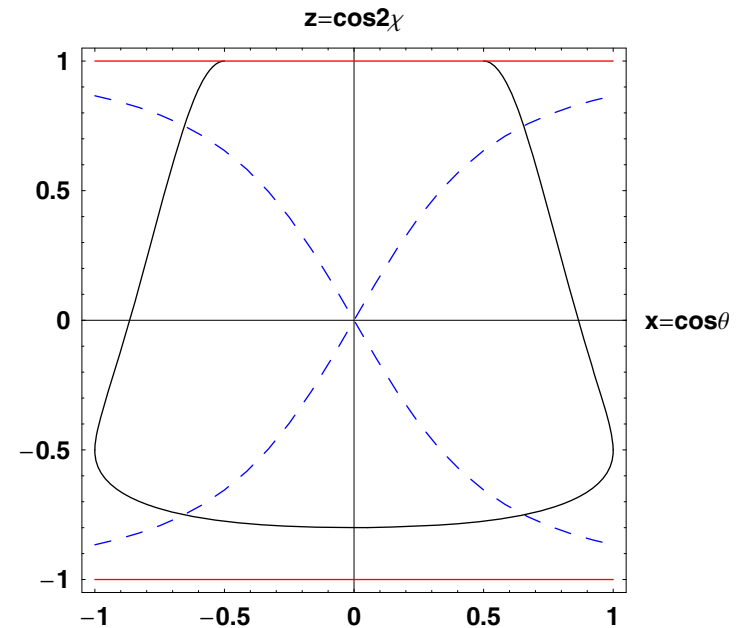
# Granična linija Y-strune preko hiper-sfernih uglova

- Fizički ugao medju koordinatama  $(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$  je  $\theta$
- “Hiper-ugao” medju koordinatama
$$2\chi = \tan^{-1} \left( \frac{2\rho\lambda}{\rho^2 - \lambda^2} \right)$$
- Granica izmedju tri “slučaja” mora biti invarijantna pod permutacijama  $S_3$



# Granična linija Y-strune preko kosinusa hiper-sfernih uglova

- Kosinus fizičkog ugla medju koordinatama  $\cos \theta$
- Kosinus “hiper-ugla” medju koordinatama  $z = \cos 2\chi = \frac{\rho^2 - \lambda^2}{\rho^2 + \lambda^2}$
- Granica medju njima morati biti invarijantna pod permutacijama  $S_3$

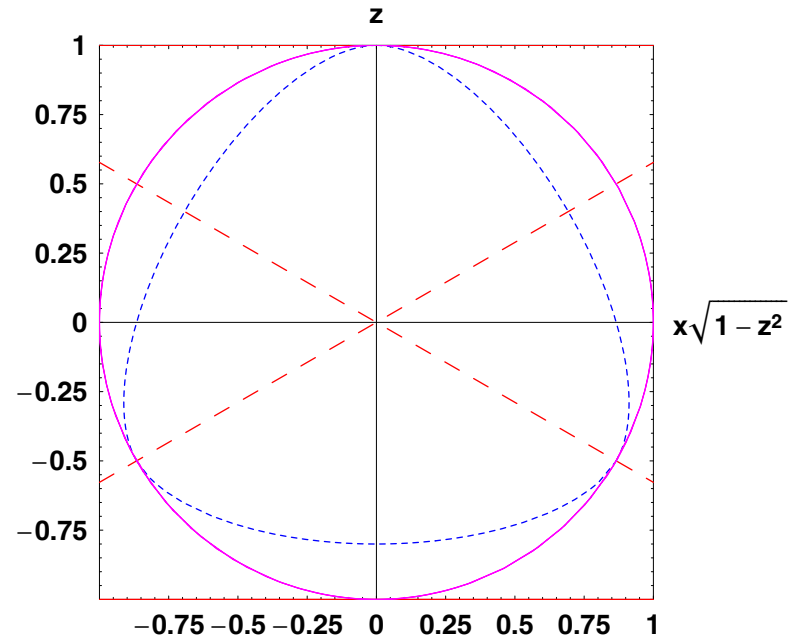


# Granična linija Y-strune preko novih varijabli kosinusa hiper-sfernih uglova

- Pravougaoni domen (starih) koordinata  $(x,z)$  se preslikava u kružni domen (ljubičast) novih koordinata

$$z' = z, x' = x\sqrt{1-z^2}$$

- Granična linija (plava) je očigledno invarijantna pod rotacijama od  $\frac{2\pi}{3}$
- Kakva je to kriva? To je primer Reuleaux-ove krive



# Reuleaux-ov “Trougao”

- Ovo je jedna od Reuleaux-ovih krivih zasnovanih na najprostijoj, tzv.
- Reuleaux-ov trougao se sastoji od lukova kružnice umesto strana, sa centrima u vrhovima ravnoustranog trougla. On ima oštre vrhove.
- To je primer “krive konstantne širine”, koja ima istu “širinu” bez obzira na orijentaciju merenja.

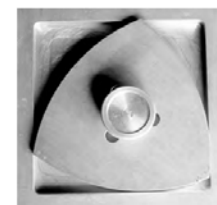
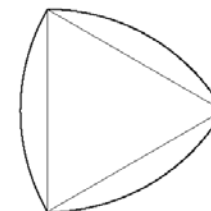
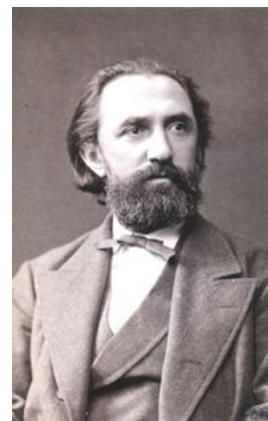
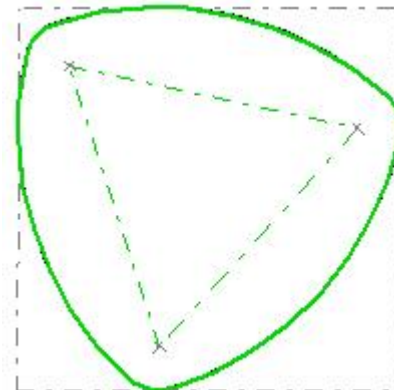
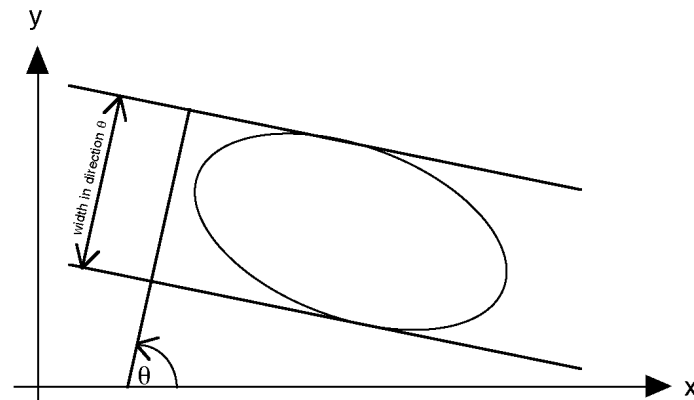


Figure 10.3. Reuleaux's rotor.

circular arcs centred at each vertex passing through the other two. It is known as *Reuleaux's rotor*, after Franz Reuleaux (1829–1905), and is shown as both a schematic and a model in figure 10.3. Historically, the first author to mention such shapes of which we are aware is Euler (1778).

# Krive konstantne širine

- Ovo je primer “krive konstantne širine”, koja ima istu “širinu” bez obzira na orijentaciju merenja.
- “Širina” zatvorene konveksne krive je definisana kao razdaljina između (dve) paralelne linije koje je ograničavaju.



# Reuleaux-ove krive

- Drugi primeri su krug (sa najvećom površinom za datu širinu, t.j. obim), i Reuleaux-ov trougao (sa najmanjom površinom), ali takvih kriva ima beskonačno mnogo.
- Sve krive konstantne širine su konveksne.
- Sve imaju isti obim (Barbier-ov teorem).

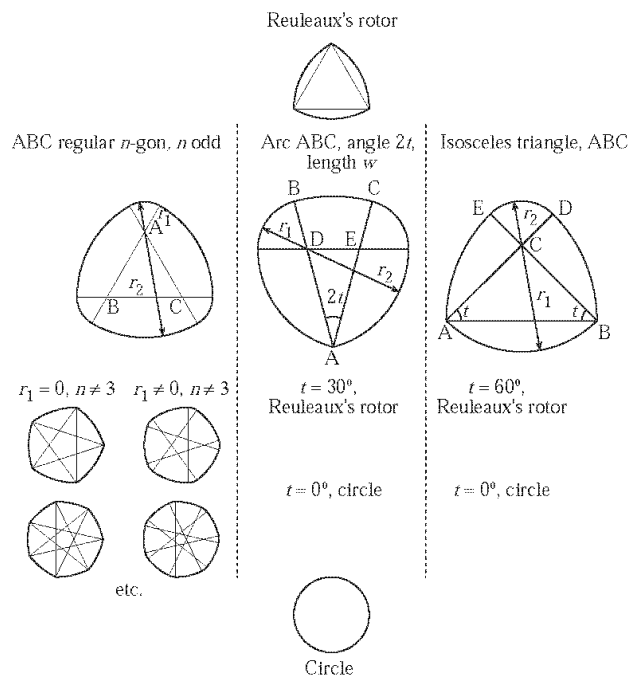


Figure 10.4. Families of shapes of constant width.

# Reuleaux-ove krive

- Krive konstantne širine (k.k.š.) imaju i neke praktične svrhe n.pr. za “burgije za četvrtaste rupe”.
- Wankel-ov rotor je primer k.k.š.



Figure 10.5. A collection of shapes of constant width by G. J. H. Cordle as a final year undergraduate project in 1995.

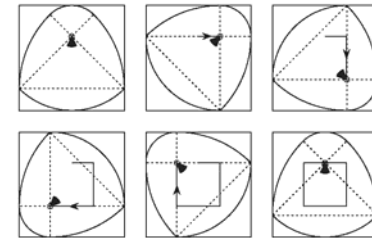


Figure 10.11. Cutting a square hole.

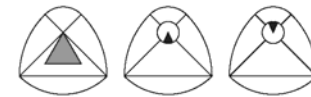


Figure 10.12. Details of a practical cutting tool for a square drill.

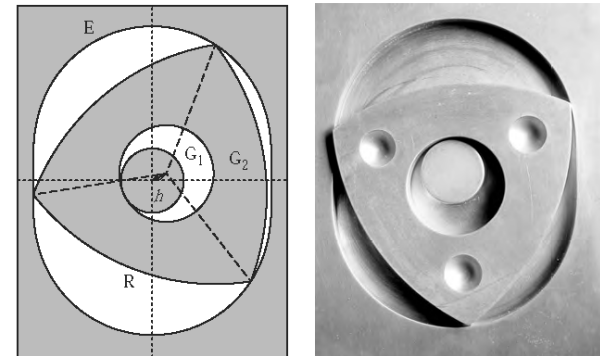


Figure 10.13. An application to engine design.

# Reuleaux-ove krive

- “Kakve sve oblike mora da ima poklopac šahta a da sam ne može da propadne u šaht?”
- Ili obrnuto: “kako treba da izgleda rupa kroz koju propada samo određena vrsta kovanog novca?”



Figure 10.1. United Kingdom coins: 2p, 20p and 50p.



Figure 10.14. The minimum circumscribed circle of a 20p piece.



# Pregled i otvorena pitanja

- Počevši od Fermat-Torricelli-evog problema za trougao u Euklidovoj geometriji, stigli smo do krivih konstantne širine.
- Šta će se desiti ako krenemo od Fermat-Torricelli-evog problema za trougao u ne-Euklidovoj, recimo sfernoj geometriji? Kakve krive (“konstantne sferne širine”?) možemo tu da očekujemo?
- Šta će se desiti ako krenemo od Fermat-Torricelli-evog problema za tetraedar u Euklidovoj geometriji? Ovo pitanje je (opet) povezano sa fizikom.